

УДК 616.441:615.835

**ОБ УСЛОВИЯХ И ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ХАГЕНА - ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ
ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ТИРЕОИДНОГО СТАТУСА НА СОСТОЯНИЕ КРОВООБРАЩЕНИЯ**

З.Х. АБАЗОВА¹, В.К. КУМЫКОВ¹, Б.Х. ХАЦУКОВ², М.К. ЭФЕНДИЕВА³

¹ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173, E-mail: zalina.abazova@mail.ru

²ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а, E-mail: iipru@rambler.ru

³Медико-диагностический центр СЭМ, 360000 Нальчик, пр. Шогенцукова, 33/69, E-mail: postbox706@hotmail.com

Аннотация: В настоящей работе изучаются особенности оценки изменений гемодинамических параметров кровообращения, используемых при описании тиреоидного статуса. На основе экспериментальных данных, полученных авторами для объемной скорости движения жидкости по цилиндрическим трубкам диаметром 1,5 мм и 3 мм, а также расчетов, проведенных с использованием формулы Хагена - Пуазейля, устанавливаются источники ошибок, допускаемых исследователями. В выводах работы формулируются условия и границы применимости уравнения Хагена – Пуазейля, используемого для описания кровообращения и для установлении параметров инфузии с применением инфузионных систем.

Ключевые слова: тиреоидный статус, кровообращение, гемодинамика, формула Хагена – Пуазейля.

**ABOUT CONDITIONS AND BOUNDS OF APPLICABILITY OF THE HAGEN – POISEUILLE
FORMULA FOR THE ASSESSMENT OF INFLUENCE OF THYROID STATUS ON THE STATE OF
BLOOD CIRCULATION**

Z.KH.ABAZOVA¹, V.K. KUMYKOV¹, B.KH.HATSUKOV², M.K.EFENDIEVA²

¹FGBOU VPO "Kh.M. Berbekov Kabardin-Balkar State University", 360004, Nalchik, Chernyshevskogo st., 173, e-mail: zalina.abazova@mail.ru

²Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC of the Russian Academy of Sciences, 360000, Nalchik, 37-a, I. Armand street, e-mail: iipru@rambler.ru

³Medic-diagnostic center SAM, 360000 Nalchik, pr. Shogentsukova, 33/69, e-mail: postbox706@hotmail.com

Abstract: The specific features of an assessment of changes of haemodynamic parameters of blood circulation used for description of thyroid status are studied in present paper. On the base of the experimental data obtained by authors for the volume speed of liquid movement in cylindrical tubes with a diameters of 1,5 mm and 3 mm, and also the calculations which have been carried out with the use of Hagen – Poiseuille’s equation, the sources of mistakes making by researchers are established. In conclusions of the paper the conditions and bounds of applicability of Hagen – Poiseuille’s equation, used for the blood circulation description and for the establishment of infusion parameters with the use of infusion systems, are formulated.

Key words: thyroid status, blood circulation, haemodynamics, Hagen – Poiseuille formula.

Как известно, тиреоидные гормоны оказывают существенное влияние на гемодинамические параметры организма, в частности, на скорость кровотока, артериальное давление, общее периферическое сопротивление кровеносных сосудов [1, 3, 7]. Уменьшение периферического сопротивления сосудов обусловлено воздействием гормона трийодтиронина на гладкую мускулатуру сосудов и приводит к снижению артериального давления, повышению объема циркулирующей крови и эритроцитарной массы, скорости кровотока и увеличению фракции сердечного выброса. Изменения параметров гемодинамики щитовидной железы при гипер- и гипотиреозе, а также под влиянием тиреостатической или заместительной терапии могут использоваться, наряду с анализом клинической картины, исследованием гормонального тиреоидного статуса и рефлексометрией в качестве дополнительных критериев оценки функциональных нарушений щитовидной железы при тиреоидной патологии [2, 4-6, 8, 9].

Однако, несмотря на то, что механизмы изменений гемодинамики при тиреоидной патологии известны, до настоящего времени нет единого подхода к количественной оценке этих изменений. Так, гемодинамические уравнения, описывающие состояние кровотока и повторяющие известные уравнения гидродинамики, составлены для идеальной жидкости, каковой кровь, как известно, не является. Основополагающим соотношением, используемым для описания кровообращения, а также для построения соответствующих моделей, является формула Хагена – Пуазейля, которая устанавливает зависимость объемной скорости течения жидкости от диаметра цилиндрической трубки, а также от их гидродинамического сопротивления:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta l}, \quad (1)$$

где Q – объем жидкости, протекающей через сосуд за единицу времени, R – радиус трубки, Δp – разность давлений на концах трубки, l – длина трубки, η – вязкость жидкости.

Вместе с тем, существуют ограничения, а также условия применимости уравнений гидродинамики в живых системах, поэтому их произвольное применение может привести к искажениям при описании физиологических процессов в системе кровообращения. Показательным примером является работа, опубликованная врачами Бирмингемской больницы (Великобритания) и больницы С. Мота при Мичиганском университете (США). Статья вышла под названием «Закон Хагена - Пуазейля - факт или вымысел» [10]. В работе указывается, что формула Хагена - Пуазейля, устанавливающая зависимость объемной скорости кровотока от диаметра кровеносного сосуда, не дает реальной картины происходящего. В частности, из этой формулы следует, что при увеличении диаметра сосуда вдвое объемная скорость кровотока увеличивается в 16 раз. Однако эксперимент, проведенный врачами с использованием инфузионных капельниц, показал, что при увеличении диаметра канюли с 1 мм до 2 мм, т.е. вдвое, объемная скорость истечения раствора увеличивается в 6 раз, а не в 16, как это должно быть. Здесь же сказано, что формула, полученная Ж.М. Пуазейлем около 200 лет назад, была слепо внедрена в клиническую практику без экспериментальной проверки. Статья заканчивается фразой: «Сколько еще других "законов" мы используем в клинической практике, которые никогда не были подтверждены?».

Цель исследования. Целью работы является изучение особенностей течения жидкостей в прямолинейных трубках, проверка корректности формулы Хагена - Пуазейля, а также условий её применимости. При этом ставились следующие задачи:

- провести измерения объемной скорости течения жидкости по магистралям при постоянной разности давлений на ее концах в зависимости от длины магистрали; повторить измерения для магистралей различного сечения;
- провести теоретический расчет указанных зависимостей для магистралей заданной длины и сечения с использованием формулы Хагена - Пуазейля;
- провести сравнительный анализ экспериментальных и расчетных данных, проверить справедливость следствий из формулы Хагена – Пуазейля, установить условия и границы её применимости при описания кровообращения.

Материалы и методы исследования. Для проведения измерений использовалась лабораторная установка, состоящая из емкости с водой, соединяющейся с мерной емкостью для сбора воды с помощью полихлорвинилового шланга. Время прохождения жидкости через магистраль измерялось секундомером. Разность давлений на концах магистрали в ходе эксперимента поддерживалась постоянной с помощью клапанного устройства, контролирующего уровень воды в емкости.

Для эксперимента использовалась обезгаженная вода, поскольку в обычной воде содержится значительное количество растворенного газа, который при прохождении через трубку выходит в свободное состояние, образуя на стенках большое количество пузырьков, искажая наблюдаемую картину и вызывая большой разброс измеряемых данных.

После калибровки магистралей, сборки установки, промывки системы этиловым спиртом и заполнения ее обезгаженной водой приступали к измерениям. Пуск воды осуществлялся с помощью затворного клапана с одновременным включением секундомера. После прохождения заданного объема воды секундомер выключался. Исходная длина магистрали варьировалась от 3 до 0,2 метров. В эксперименте использовались трубки диаметром 1,5 мм и 3 мм. Объемная скорость тока воды определялась делением объема прошедшей через систему жидкости в миллилитрах на время ее прохождения в секундах. Измерения для каждой длины шланга проводились по 5 раз, а среднее значение объемной скорости течения жидкости определялось статистической обработкой данных отдельных измерений с использованием критерия Стьюдента для малой выборки при надежности 95%.

При определении интервалов значений длины шланга исходили из того, что изучаемые закономерности должны были охватывать значения числа Рейнольдса, соответствующие как турбулентному, так и ламинарному потоку жидкости с тем, чтобы было возможно определить границы, при которых выполняется соотношение Хагена - Пуазейля. Для большей корректности измерений магистрали подбирались строго прямыми, без изгибов, которые могли бы исказить полученные результаты.

Результаты и их обсуждение. В таблицах 1 и 2 приводятся экспериментальные и расчетные данные для трубок сечением 3 и 1,5 мм соответственно.

Таблица 1

Основные параметры течения жидкости по горизонтальной трубке диаметром 3,0 мм

$l, \text{ м}$	$\frac{l}{d}$	Re	$Q_3, \text{ мл/с}$	
			Эксп.	Расч.
3,00	1000	1147	2,7±0,1	2,6
2,80	933	1190	2,8±0,1	2,8
2,60	867	1232	2,9±0,1	3,0
2,40	800	1275	3,0±0,1	3,3

2,20	733	1360	3,3±0,1	3,6
2,00	667	1445	3,5±0,1	3,9
1,80	600	1615	3,9±0,2	4,4
1,60	533	1742	4,4±0,2	4,9
1,40	467	1912	4,9±0,2	5,6
1,20	400	2125	5,5±0,2	6,6
1,00	333	2380	6,0±0,2	7,9
0,80	267	2847	6,6±0,2	9,9
0,60	200	3272	7,7±0,3	13,2
0,40	133	3867	9,1±0,3	19,7
0,20	67	4717	9,9±0,4	39,5

Таблица 2

Основные параметры течения жидкости по горизонтальной трубке диаметром 1,5 мм

$l, \text{ м}$	$\frac{l}{d}$	Re	$Q_{1,5}, \text{ мл/с}$	
			Эксп.	Расч.
3,00	2000	102	0,17±0,01	0,17
2,80	1867	144	0,17±0,01	0,18
2,60	1733	153	0,18±0,01	0,19
2,40	1600	161	0,19±0,01	0,2
2,20	1467	178	0,21±0,01	0,22
2,00	1333	195	0,23±0,01	0,24
1,80	1200	255	0,26±0,01	0,27
1,60	1067	297	0,30±0,02	0,31
1,40	933	331	0,36±0,02	0,35
1,20	800	374	0,43±0,02	0,41
1,00	667	416	0,52±0,03	0,49
0,80	533	493	0,64±0,04	0,61
0,60	400	586	0,79±0,05	0,82
0,40	267	646	0,99±0,06	1,22
0,20	133	850	1,30±0,08	2,45

В первых колонках таблиц указаны длины трубок l в метрах; во вторых колонках – отношения длин трубок к их диаметрам $\frac{l}{d}$; в третьих колонках – соответствующие им значения числа Рейнольдса Re ; в четвертых колонках – экспериментальные данные объемной скорости течения жидкости для трубок разной длины в мл/с: Q_3 – для трубок диаметром 3 мм и $Q_{1,5}$ – для трубок диаметром 1,5 мм; в пятых колонках – соответствующие им значения объемной скорости течения жидкости, рассчитанные по формуле Пуазейля. Числа Рейнольдса рассчитывались по формуле

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (2)$$

где ρ - плотность жидкости, v - линейная скорость течения жидкости, η - ее вязкость, d - диаметр трубки.

Как видно из таблицы 1, экспериментальные и расчетные данные объемной скорости течения жидкости для трубок диаметром 3 мм находятся в удовлетворительном согласии для значений числа Рейнольдса, не превышающих критическое $Re = 2300$. То же можно сказать и о данных, приведенных в таблице 2 для трубок диаметром 1,5 мм, для которых число Рейнольдса во всех случаях не достигает критического значения. Исключение составляют данные, полученные для трубок малых длин (0,2 – 0,4 м), при которых поток жидкости еще не успевает установиться.

Критерий $\frac{l}{d} \geq 500$, о котором говорится в работе [10], связан с критерием Рейнольдса, однако не может быть объективным показателем характера движения жидкости, а, следовательно, и условием применимости формулы Хагена - Пуазейля. Об этом свидетельствуют то, что расчетные значения объемной скорости течения жидкости, полученные по этой формуле для случаев, когда $\frac{l}{d} < 500$, также дают удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. Так, для трубки диаметром $d = 3$ мм и длиной $l = 1,4$ м ($\frac{l}{d} = 467$) объемная скорость течения жидкости, полученная экспериментально, составляя 4,9 мл/с, согласуется с расчетным значе-

нием 5,6 мл/с. Аналогичное имеет место для трубки того же диаметра длиной 1,2 м ($\frac{l}{d} = 400$), при которых экспериментальное и расчетное значение составляют 5,5 и 6,6 мл/с соответственно.

Важным следствием формулы Хагена - Пуазейля является то, что при изменении диаметра трубки в 2 раза объемная скорость течения жидкости изменяется в 16 раз. Однако, авторы работы [10] указывают на обнаруженное ими нарушение этого критерия, приводя данные о том, что на самом деле Q при изменении d в 2 раза изменяется в 6 раз, а не в 16 раз, как это следует из формулы Хагена - Пуазейля. Эти данные находятся в полном противоречии с полученными нами экспериментальными данными. Как следует из таблицы 3, отношение $\frac{Q_3}{Q_{1,5}}$ для значений числа Рейнольдса, не превышающих критического, лежит в интервалах значений приблизительно от 13 до 16, что для условий эксперимента, в котором использовалась реальная жидкость, является результатом, находящимся в удовлетворительном согласии со следствием из формулы Хагена – Пуазейля.

Таблица 3

Сравнительный анализ параметров течения жидкости для трубок различных диаметров

l, м	d = 3 мм		d = 1,5 мм		$\frac{Q_3}{Q_{1,5}}$
	Q_3 , мл/с	Re	$Q_{1,5}$, мл/с	Re	
3,00	2,7±0,1	1147	0,17±0,01	102	15,9
2,80	2,8±0,1	1190	0,17±0,01	144	16,5
2,60	2,9±0,1	1232	0,18±0,01	153	15,8
2,40	3,0±0,1	1275	0,19±0,01	161	15,8
2,20	3,3±0,1	1360	0,21±0,01	178	15,7
2,00	3,5±0,1	1445	0,23±0,01	195	15,2
1,80	3,9±0,2	1615	0,26±0,01	255	15,0
1,60	4,4±0,2	1742	0,30±0,02	297	14,7
1,40	4,9±0,2	1912	0,36±0,02	331	13,6
1,20	5,5±0,2	2125	0,43±0,02	374	12,8
1,00	6,0±0,2	2380	0,52±0,03	416	11,5
0,80	6,6±0,2	2847	0,64±0,04	493	10,3
0,60	7,7±0,3	3272	0,79±0,05	586	9,7
0,40	9,1±0,3	3867	0,99±0,06	646	9,2
0,20	9,9±0,4	4717	1,30±0,08	850	7,6

На наш взгляд, результаты, приведенные в работе [10], были получены с нарушением условий, для которых была получена формула Хагена – Пуазейля, которая справедлива для жестких, прямых, горизонтальных трубок, ламинарного потока, гомогенной жидкости, смачиваемых поверхностей сосудов (трубок). Нарушение любого из этих условий может привести к расхождениям между экспериментальными и расчетными данными. Покажем это на следующем примере.

Оценим время истечения жидкости из расположенного вертикально сосуда цилиндрической формы диаметром D через канюлю диаметром d . Пусть v_1 – скорость понижения уровня жидкости в сосуде, v_2 – скорость истечения жидкости через канюлю, соединенную с сосудом через отверстие в его дне. Считая жидкость идеальной, для нее можно записать уравнение Бернулли в следующем виде:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (3)$$

где ρ - плотность жидкости, h - ее высота в сосуде в данный момент времени, g - ускорение свободного падения.

Решая (3) совместно с условием неразрывности струи $v_1 S_1 = v_2 S_2$, где S_1 и S_2 - площади поперечного сечения сосуда и канюли соответственно, можно определить v_1 :

$$v_1 = \frac{S_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}. \quad (4)$$

Переходя в (4) от сечений S_1 и S_2 к диаметрам D и d , получим:

$$v_1 = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}. \quad (5)$$

Учитывая, что $d^4 \ll D^4$, (5) можно переписать:

$$v_1 = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{D^2}. \quad (6)$$

Вводя в (6) вместо h переменную координату уровня жидкости y , можно записать выражение для понижения уровня жидкости dy за малый промежуток времени dt :

$$dy = \frac{d^2 \sqrt{2gy}}{D^2} dt. \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, после решения которого получим время истечения жидкости из сосуда через канюлю:

$$t = \sqrt{\frac{2h(D^4 - d^4)}{gd^4}}, \quad (8)$$

которое при условии $d^4 \ll D^4$ окончательно запишется:

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что при увеличении диаметра канюли в 2 раза время истечения жидкости из сосуда уменьшится в 4 раза; соответственно в 4 раза увеличится объемная скорость истечения жидкости.

Таким образом, нельзя утверждать, что критерий справедливости формулы Хагена-Пуазейля $\frac{l}{d} \geq 500$ однозначен и соблюдается для трубок всех диаметров. Ведь в эксперименте, проводившемся в [10], канюли и пакет с жидкостью располагались не горизонтально, а разность давлений на концах трубки не поддерживалась постоянной.

Выводы.

1. Несмотря на указанные противоречия, нельзя согласиться с выводами в [10], о том, что формула Хагена - Пуазейля ошибочна. Корректнее будет говорить о границах и условиях применимости формулы Хагена - Пуазейля.

2. Модели, связывающие параметры движения жидкостей по цилиндрическим трубкам, справедливы для жестких трубок, ламинарного потока, гомогенной жидкости, смачиваемых поверхностей трубок. Все эти свойства не соответствуют системе кровообращения, в которой кровеносные сосуды являются эластическими структурами с турбулентными пульсирующими потоками негомогенной крови. Тем не менее, уравнение Хагена – Пуазейля может использоваться в гемодинамике как приближенное отображение реальности. В частности, существуют показатели кровообращения, полученные на основе этих уравнений.

3. Объективным критерием применимости формулы Хагена - Пуазейля следует считать не значения величины $\frac{l}{d}$, на которую указывается в [10], а значения числа Рейнольдса, устанавливающего границу между ламинарным и турбулентным потоками жидкости. При значениях числа Рейнольдса, меньших его критического значения, формула Хагена – Пуазейля дает удовлетворительное согласие с экспериментом, что делает ее применение для описания кровообращения допустимым.

4. Полученные данные могут быть полезными при оценке показателей кровообращения щитовидной железы при тиреоидной патологии. Кроме того, изучение кровотока в динамике на фоне проводимой заместительной и тиреостатической терапии при гипо- и гипертиреозе будет способствовать улучшению диагностики, назначению адекватной терапии и контролю её эффективности.

Литература

1. Балаболкин, М.И. Фундаментальная и клиническая тиреологика / М.И. Балаболкин, Е.М. Клебанова, В.М. Кремская. – М.: Медицина, 2007. – 816 с.
2. Диагностика нарушений функции щитовидной железы с помощью рефлексометра с пьезоэлектрическим датчиком / З.Х. Абазова [и др.] // Вестник новых медицинских технологий. – 2004. – № 3. – С. 97–100.
3. Кумыков, В.К. О клиническом опыте мониторинга артериального давления / В.К. Кумыков [и др.] // Вестник РУДН. Серия медицина. – 2007. – № 1. – С. 38–41.
4. Метод экспресс-диагностики заболеваний щитовидной железы / З.Х. Абазова [и др.] // Медицинская техника. – 2005. – № 3. – С. 8–11.
5. Новый метод регистрации времени проведения ахиллова рефлекса при экспресс-диагностике патологии щитовидной железы / З.Х. Абазова [и др.] // Известия вузов. Поволжский регион. Серия медицинские науки. – 2006. – № 1. – С. 73–81.
6. Прямой метод измерения времени проведения коленного рефлекса при тиреоидных патологиях / З.Х. Абазова [и др.] // Медицинская техника. – 2006. – № 3. – С. 10–12.
7. Чухраева, О.Н. Изменение тиреоидной гемодинамики при диффузных заболеваниях щитовидной железы / О.Н. Чухраева, С.Л. Жарский // Дальневосточный медицинский журнал. – 2006. – № 1. – С. 62–66.

8. A Method for Rapid Diagnosis of Thyroid Malfunction / Z.Kh. Abazova [et al.] // Biomedical Engineering. - 2005. – V. 39 (3). – P. 103–104.
9. Direct method for measuring reflex time of knee jerk in patients with thyroid pathologies / Z.Kh. Abazova [et al.] // Biomedical Engineering. – 2006. – V. 40(3). – P. 117–119.
10. Reddy, R. Hagen-Poiseuille's law – “Fact or Fiction” / R. Reddy [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.pedsanesthesia.org/meetings/2007annual/syllabus/Scientific_Reports/SR29-Reddy.pdf